DM 2 à rendre le mercredi 8 janvier

Solution proposée.

Exercice 1 (projecteurs).

1. Soit $N \geq 1$ un entier. Montrons que P_N est un fermé d'intérieur vide, ce qui montrera l'égalité $\operatorname{Fr} P_N = P_N$.

   P_N est fermé comme préimage du fermé $\{0\}$ par l'application continue (car polynomiale) $M \mapsto M^2 - M$.

   Soit par l'absurde $P \in \operatorname{Int} P_N$. Soit $r > 0$ tel que $P + r\mathbf{B} \subset P_N$. Puisque le projecteur P et la matrice scalaire r commutent, on peut développer

$$0 = (P+r)^2 - (P+r) = P^2 + 2rP + r^2 - P - r = (2r-1)\,P + \left(r^2 - r\right),$$

   ce qui montre (dès que $|r| < \frac{1}{2}$) que P est la matrice scalaire $\frac{r(1-r)}{2r-1}$: cette dernière variant pour r assez petit, on a une contradiction.

2. Soit $n \geq 2$. Alors la matrice $\begin{pmatrix} 0 & A \\ & 1 \end{pmatrix}$ est un projecteur pour tout scalaire A, ce qui fournit une famille non bornée dans P_n (mettre ce bloc 2×2 en haut à gauche et compléter avec des 0 partout ailleurs), d'où la non-compacité de P_n. Réciproquement, l'ensemble $P_1 = \{0, 1\}$ est compact (car fini).

Exercice 2 (plus petite boule incluant un compact). Pour trouver une plus petite boule contenant B, on peut chercher *à centre fixé* le plus petit rayon possible *puis* déplacer le centre pour minimiser ce "plus petit rayon possible", d'où l'idée d'introduire l'application suggérée[1]. Montrons qu'elle est bien définie, continue et qu'elle tend vers ∞ lorsqu'on s'éloigne indéfiniment de l'origine.

Soit $a \in E$. Puisque B est borné, il est inclus dans une certaine boule que l'on peut toujours supposer centrée en a quitte à augmenter son rayon (en vertu des inclusions $r\overline{\mathbf{B}} \subset a + (r + \|a\|)\,\overline{\mathbf{B}}$), ce qui montre que la partie $\left\{r > 0\ ;\ B \subset a + r\overline{\mathbf{B}}\right\}$ est non vide et admet donc un *infimum*. Ce dernier est en fait un *minimum* vu que l'inclusion $B \subset a + r\overline{\mathbf{B}}$ se réécrit $\forall b \in B,\ \|b - a\| \leq r$, comparaisons larges qui sont conservées à la limite quand r tend (vers un réel). L'application $R : \begin{cases} E & \longrightarrow \quad \mathbf{R} \\ a & \longmapsto \quad R_a := \min\left\{r > 0\ ;\ B \subset a + r\overline{\mathbf{B}}\right\} \end{cases}$ est donc bien définie.

Montrons que R est 1-lipschitzienne. Soit $(a, b) \in E^2$. Vu les inclusions $B \subset a + R_a\overline{\mathbf{B}} \subset b + (R_a + \|b - a\|)\,\overline{\mathbf{B}}$, on a la comparaison $R_b \leq R_a + \|b - a\|$, d'où par symétrie la comparaison $|R_b - R_a| \leq \|b - a\|$.

Montrons que $\lim_{\|a\| \to \infty} R_a = \infty$. Soit $r > 0$ tel que $B \subset r\mathbf{B}$. Soit $a \in E$. Alors les boules de centre a et de rayon $< \|a\| - r$ ne rencontrent pas B, donc ne peuvent le contenir, ce qui montre $R_a \geq \|a\| - r$, d'où la tendence voulue.

Concluons. L'application R est continue en dimension finie et vérifie $R_a \overset{\|a\| \to \infty}{\longrightarrow} \infty$: un exercice du cours assure alors qu'elle atteint son *infimum* en un certain $\alpha \in E$. Par définition de R_α, on a l'inclusion $B \subset \alpha + R_\alpha\overline{\mathbf{B}}$; par ailleurs, si B est inclus dans une autre boule $a + r\overline{\mathbf{B}}$ (où $a \in E$ et $r > 0$), on a alors les comparaisons $r \geq R_a \geq \inf_E R = R_\alpha$, ce qui conclut.

L'unicité est mise en défaut par exemple dans le plan muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ pour la partie bornée $[-1, 1] \times \{0\}$. Soit $a + r\overline{\mathbf{B}}$ une boule la contenant : si l'abscisse x_a est positive, alors le rayon r majore $\left\|a - \binom{-1}{0}\right\| \geq |x_a + 1| = 1 + x_a \geq 1$, sinon le rayon majore $\left\|a - \binom{1}{0}\right\| \geq |x_a - 1| = 1 - x_a \geq 1$. Ceci montre le rayon minimal d'une boule fermée recouvrant $[-1, 1] \times \{0\}$ vaut au moins 1. Or cette partie est incluse dans les boules fermées de rayon 1 centrées en tout point de $\{0\} \times [-1, 1]$.

Remarque. Même s'il est tentant d'utiliser un argument de compacité sur $\overline{B}$, le centre d'une boule de rayon minimal n'est pas forcément dans B, par exemple si $B = \{z \in \mathbf{C}\ ;\ 1 \leq |z| \leq 2\}$ et si $E = \mathbf{C}$.

Exercice 3 (théorème de Markov-Kakutani).

[1] laquelle définit le plus petit rayon possible "par l'extérieur" ; on pourrait également le définir "par l'intérieur" par $R_a := \sup_{b \in B} \|B - a\|$ vu les équivalences (à $r > 0$ et $a \in E$ fixés)

$$B \subset a + r\overline{\mathbf{B}} \iff B - a \subset r\overline{\mathbf{B}} \iff \forall b \in B,\ b - a \in r\overline{\mathbf{B}} \iff \forall b \in B,\ \|b - a\| \leq r \iff \sup_{b \in B} \|B - a\| \leq r.$$

1. Soit $a \in K$. La suite $a_N := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f^{\circ n}(a)$ prend ses valeurs dans K car ce dernier est stable par f et par barycentre. Puisque f est affine, on a $f(a_N) - a_N = \frac{f^N(a)-a}{N}$. Puisque f stabilise K et que ce dernier est borné, le numérateur $f^N(a) - a$ est borné, d'où la tendance $f(a_N) - a_N \longrightarrow 0$. Par compacité, on peut extraire une sous-suite $(a_{\varphi(N)})$ convergeant vers un certain $\alpha \in K$, d'où l'on tire (par continuité de f et unicité de la limite) l'égalité $f(\alpha) = \alpha$, ce qui montre que α est fixe par f.

   La convexité est indispensable : prendre sinon $K = \{z \in \mathbf{C} ; 1 \leq |z| \leq 2\}$ et f une rotation non triviale de centre 0.

   La compacité est indispensable : prendre sinon $K = E$ et f une translation non triviale.

   (Pour la continuité, je laisse la question ouverte.)

2. On raisonne par récurrence sur la longueur de la famille. Soit $(f_0, f_1, ..., f_p)$ une famille *finie* d'éléments de $\mathcal{F}$ commutant deux à deux (on vient de traiter le cas $p = 0$). Par hypothèse de récurrence, K contient un point fixe par tous les $f_{i\geq 1}$, donc la partie $K' := \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Fix} f_i \cap K$ est non vide. Cette dernière partie est une intersection de fermés (les f_i étant continues, chaque $\operatorname{Fix} f_i$ est fermé comme préimage de $\{0\}$ par $f_i - \mathrm{Id}$), donc est fermée dans le compact K, donc est compacte. Par ailleurs, le caractère affine des f_i montre que K' est convexe (soient a et b dans K', soient λ et μ dans $[0, 1]$ de somme 1, soit $i \in \{1, 2, ..., p\}$, on a les égalités $f_i(\lambda a + \mu b) = \lambda f_i(a) + \mu f_i(b) = \lambda a + \mu b$, d'où l'appartenance $\lambda a + \mu b \in \operatorname{Fix} f_i$). Enfin, K' est stable par f_0 grâce à l'hypothèse de commutativité (soit $a \in K'$, soit $i \in \{1, 2, ..., p\}$, on a les égalités $f_i(f_0(a)) = f_0(f_i(a)) = f_0(a)$, d'où l'appartenance $f_0(a) \in \operatorname{Fix} f_i$). Le cas $p = 0$ permet alors donc de trouver un point de K' fixe par f_0, ce qui conclut.

   Soit (f_i) une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ commutant deux à deux. Supposons par l'absurde que les f_i n'admettent aucun point fixe en commun. L'intersection des fermés $\operatorname{Fix} f_i$ est donc vide : par compacité, on peut en extraire une sous-intersection *finie* vide, ce qui contredit le point précédent.

   Exemple : dans le plan, toute famille de similitudes de même centre.

Exercice 4 (précompacité).

1. Soit K un compact de E. Le cours nous dit que K est complet. Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut extraire du recouvrement $K \subset \bigcup_{k\in K}(k + \varepsilon\mathbf{B})$ un sous-recouvrement fini, ce qui montre que K est précompact.

   Soit à présent K un précompact complet. Soit (k_n) une suite de K, dont on veut trouver une valeur d'adhérence. Si (k_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, l'une de ces valeurs est répétée une infinité de fois et est donc d'adhérence ; dans le cas contraire, quitte à extraire, on peut supposer (k_n) injective.

   En recouvrant K par un nombre fini de boules de rayon 1, l'une de ces boules $c_0 + \mathbf{B}$ contient (par injectivité de k) une infinité de terme k_n, d'où une sous-suite $(k_{\varphi_0(n)})$ dans $c_0 + \mathbf{B}$. On recouvre ensuite K par des boules de rayon $\frac{1}{2}$: l'une d'elles contient une infinité de termes $k_{\varphi_0(n)}$, d'où une sous-suite $(k_{\varphi_0\circ\varphi_1(n)})$ dans une boule $c_1 + \frac{1}{2}\mathbf{B}$. On construit ainsi[2] de proche en proche pour tout naturel ν une sous-suite $(k_{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_\nu(n)})$ dans une boule $c_\nu + \frac{1}{2^\nu}\mathbf{B}$. Définissons une extractrice $\psi : n \mapsto \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$ et fixons un naturel ν. La suite $(k_{\psi(n)})_{n\geq\nu}$ étant extraite de $(k_{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_\nu(n)})$, on a l'appartenance $k_{\psi(n)} \in c_\nu + \frac{1}{2^\nu}\mathbf{B}$ pour tout $n \geq \nu$, d'où

$$\forall p, q > \nu,\ \left\|k_{\psi(q)} - k_{\psi(p)}\right\| < \frac{1}{2^\nu}.$$

   La suite $(k_{\psi(n)})$ est donc de Cauchy, donc converge par complétude de K, ce qui conclut.

2. Soit A une partie précompacte. Le procédé diagonal ci-dessus montre comment de toute suite extraire une suite de Cauchy.

   Soient réciproquement $\varepsilon > 0$ et A une partie qui n'est jamais réunion d'un nombre fini de boule de rayon ε. Soit $a_0 \in A$. Puisque A n'est pas inclus dans la boule $B_0 := a_0 + \varepsilon\mathbf{B}$, il y a un point a_1 de A hors de B_0. Ensuite, puisque A n'est pas inclus dans $B_0 \cup B_1$ (où $B_1 := a_1 + \varepsilon\mathbf{B}$), on peut prendre un point dans $A \setminus (B_1 \cup B_2)$ On construit[3] ainsi de proche en proche une suite $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$ telle que $a_{n+1} \in B_{n+1} \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_n)$ où l'on a noté $B_k := a_k + \varepsilon\mathbf{B}$ pour tout naturel k. Ces appartenances forcent les comparaisons $d(a_p, a_q) \geq \varepsilon$ pour tous naturels $p \neq q$, empêchant toute sous-suite de (a_n) d'être de Cauchy.

[2] le lecteur soigneux vérifiera que tous les choix effectués dans ce paragraphe peuvent l'être grâce à des fonctions de choix explicites (pas besoin ici de l'axiome du choix)

[3] *modulo* une utilisation de l'axiome des choix dépendants

Retrouvons le point ci-dessus. Soit K une partie complète précompacte. Soit $(k_n) \in K^{\mathbf{N}}$. Par précompacité, on peut extraire une sous-suite $\left(k_{\varphi(n)}\right)$ de Cauchy ; par complétude, cette sous-suite converge dans K, d'où une valeur d'adhérence.

Exercice 5 (algèbre commutative).

1. Soit $b \in \mathbf{B}$. Montrons que $1 - b$ est inversible. La série $\sum_{n\geq 0} b^n$ est absolument convergente, donc converge. Montrons que sa somme est l'inverse de $1-b$. Soit $N \in \mathbf{N}$. Puisque $(1-b)\sum_{n=0}^{N-1} b^n = 1 - b^N = \sum_{n=0}^{N-1} b^n (1-b)$, faire tendre N vers ∞ donne les deux égalités voulues.
2. Soit $a \in A^\times$. Soit $x \in E$. Alors $a + x = a\left(1 + a^{-1}x\right)$ sera dans $A^\times$ si $1 + a^{-1}x$ l'est, ce qui (d'après la question précédente) est le cas si $\left\|a^{-1}x\right\| < 1$, comparaison vérifiée si $\|x\| < \frac{1}{\|a\|}$.

   Autre formulation : la multiplication par a^{-1} est continue et envoie a sur 1, donc la préimage de l'ouvert $1 + \mathbf{B}$ est un ouvert contenant 1 dont tous les éléments ont une image par f tombant dans $A^\times$.
3. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Puisque $\mathfrak{m}$ est strict, il ne contient aucun inversible, d'où l'inclusion $\mathfrak{m} \subset {}^cA^\times$; ce dernier étant fermé (complémentaire de l'ouvert $A^\times$), prendre l'adhérence donne l'inclusion $\overline{\mathfrak{m}} \subset \overline{{}^cA^\times} = {}^cA^\times$, ce qui montre que l'idéal $\overline{\mathfrak{m}}$ (l'adhérence d'un idéal reste un idéal tout comme l'adhérence d'un sev est un sev) ne contient pas d'inversible, donc ne vaut pas tout A, donc vaut $\mathfrak{m}$ par maximalité de ce dernier, ce qui conclut.

Exercice 6 (fermés emboités).

1. Piochons[4] un f_n dans chaque F_n. En écrivant pour tous naturels $p < q$

$$\|f_q - f_p\| \leq \delta(F_p) \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

   on voit que la suite (f_n) est de Cauchy, donc converge vers un point f. Or, à $k \in \mathbf{N}$ fixé, la suite $(f_n)_{n\geq k}$ est un suite convergente dans le fermé F_k, ce qui montre que f est dans tous les F_n.

   Soit réciproquement $g \in \bigcap_{n\in\mathbf{N}} F_n$. À $n \in \mathbf{N}$ fixé, les appartenances $f, g \in F_n$ montrent la comparaison $d(f,g) \leq \delta(F_n)$, d'où (lorsque $n \to \infty$) $d(f,g) \leq 0$ et l'égalité $f = g$.
2. Si l'un des fermés est vide, il est clair que l'intersection ne peut contenir personne.

   Si les F_n ne sont pas fermés, la suite $\left]0, \frac{1}{n}\right[$ est un contre-exemple.

   Si la suite (F_n) ne décroît pas, il suffit de prendre deux fermés disjoints pour vider l'intersection. Par exemple, alterner $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et $\left[1, 1 + \frac{1}{n}\right]$ est un contre-exemple.

   Si la suite $\delta(F_n)$ ne tend pas vers 0, la suite $\left[0, 1 + \frac{1}{n}\right]$ est un contre-exemple. L'intersection peut également être vide : considérer la suite $[n, \infty[$. Si le caractère non borné de cette dernière ne nous plaît pas, regardons-en un analogue.dans le complété de $\mathbf{R}[X]$ pour la norme $\|\cdot\|_1$: les fermés $F_n := \left\{X^k \ ; \ k \geq n\right\}$ sont de diamètre constant 2. Pour un contre-exemple fonctionnel (si les fermés ne sont pas bornés), on pourra considérer dans $C^0([0,1], \mathbf{R})$ normé par L^∞ les fermés constitués des fonctions valant 1 en 1 et s'annulant sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.
3. Soit (a_n) une suite de Cauchy. Pour tout naturel n, notons

$$\varphi(n) := \min\left\{N \in \mathbf{N} \ ; \ p, q > N \implies \|a_q - a_p\| < \frac{1}{2^n}\right\}.$$

   Alors les fermés $F_n := a_{\varphi(n)} + \frac{1}{2^n}\overline{\mathbf{B}}$ vérifient les hypothèses souhaitées, donc il y a un point a dans tous les F_n. Ce point étant limite de la suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)$, la suite (a_n) admet une valeur d'adhérence, donc (étant de Cauchy) converge vers cette valeur d'adhérence.

   Idée cachée : les fermés $\overline{\{a_p \ ; \ p \geq n\}}$ vérifient les bonnes hypothèses, donc leur intersection $\operatorname{Adh} a$ est non vide ; a étant par ailleurs de Cauchy, elle converge.

Exercice 7 (théorèmes de points fixes).

1. Soit $\gamma < 1$ tel que $\forall a, b \in C, \ \|f(a) - f(b)\| \leq \gamma\|a - b\|$.

   Montrons déjà l'unicité d'un éventuel point fixe. Soient a et b deux points fixés par f. La comparaison $\|f(a) - f(b)\| \leq \gamma\|a - b\|$ devient $\|a - b\|(1 - \gamma) \leq 0$: le second facteur étant > 0, le premier doit être ≤ 0, donc est nul, d'où l'égalité $a = b$.

[4] Il conviendrait d'utiliser l'axiome du choix dénombrable pour invoquer une suite (f_n) dans le produit dénombrable $\prod_{n\in\mathbf{N}} F_n$.

Soit $c \in C$. Pour tout naturel ν, on note $c_\nu := f^{\circ\nu}(c)$. On a alors pour tout naturel n les comparaisons

$$\|c_{n+1} - c_n\| = \|f(c_n) - f(c_{n-1})\| \leq \gamma \|c_n - c_{n-1}\| \leq \gamma^2 \|c_{n-1} - c_{n-2}\| \leq \cdots \leq \gamma^n \underbrace{\|c_1 - c_0\|}_{=:D},$$

d'où l'on déduit pour tous naturels $p \leq q$ les comparaisons et tendance

$$\|c_q - c_p\| = \left\| \sum_{p \leq i < q} (c_{i+1} - c_i) \right\| \leq \sum_{p \leq i < q} \|c_{i+1} - c_i\| \leq \sum_{p \leq i < q} \gamma^i D \leq D \sum_{i \geq p} \gamma^i = \frac{D}{1-\gamma} \gamma^p \underset{\text{car } |\gamma|<1}{\overset{p \to \infty}{\longrightarrow}} 0,$$

ce qui montre que la suite (c_n) est de Cauchy, donc converge. Notons $\ell := \lim c$. La fonction f étant lipschizienne, elle est continue, donc les égalités $c_{n+1} = f(c_n)$ donnent (après tendance de n vers ∞) l'égalité $\ell = f(\ell)$, ce qui conclut.

2. Soit $p \geq 1$ un entier tel que $f^{\circ p}$ est contractante. Le point précédent nous donne un unique point ℓ fixé par f^p. Vu les égalités $f(\ell) = f(f^p(\ell)) = f^{p+1}(\ell) = f^p(f(\ell))$, le point $f(\ell)$ est aussi fixé par f^p, d'où (par unicité) l'égalité $f(\ell) = \ell$. Soit par ailleurs l un autre point fixe par f. On a alors $l = f(l) = f(f(l)) = f^2(l) = \cdots = f^p(l)$, donc l est fixe par f^p, d'où (par unicité) l'égalité $l = \ell$.

   Remarque. On peut montrer que le point fixe de f s'obtient encore en itérant f à partir de n'importe quel point $c \in C$ initial. En notant γ un facteur de contraction de f^p, on peut également montrer la comparaison $\|f^n(c) - \ell\| = O(\gamma^n)$: on dit que la convergence est ***géométrique*** de raison γ.

3. La fonction $\delta : x \mapsto \|x - f(x)\|$ est continue (par composition) sur le compact K, donc y atteint son infimum en un point $a \in K$. Observer $f(a) \in K$. Si $f(a) \neq a$, l'hypothèse sur f permet d'écrire $\delta(f(a)) = \|f(a) - f(f(a))\| < \|a - f(a)\| = \delta(a) = \min_K \delta$, ce qui est absurde.

   Remarque. Comme ci-dessus, on peut montrer que le point fixe de f s'obtient encore en itérant f à partir de n'importe quel point $k \in K$ initial. On observera qu'un tel f n'est pas forcément contractant, par exemple si $f = \sin$ et $K = [0, 1]$.

Exercice 8 (équations différentielles de Fredholm et de Volterra). Notons $\gamma := \ell(S) \|\Lambda\|_\infty$.

1. Posons $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & s \mapsto e(s) + \int_a^b \Lambda(t,s)\, x(t)\, dt \end{array} \right.$, de sorte que le problème revient à l'existence d'un point fixe par φ. L'espace E étant complet d'après le cours (fermé du complet $\mathcal{B}(S, \mathbf{K})$), il suffit de montrer que φ est bien définie et contractante (sous l'hypothèse $\gamma < 1$).

   Montrons que φ est bien définie. Soit $x \in E$. Montrons que $\varphi(x)$ est continue sur S. Puisque e l'est déjà, il suffit de montrer que $s \mapsto \int_a^b \Lambda(t,s)\, x(t)\, dt$ est continue. Or l'intégrande est continue en (t, s), donc les théorèmes usuels[5] de continuité sous le signe $\int$ s'appliquent.

   Montrons que φ est γ-lipschitzienne. Soient $x, y \in E$ et $s \in S$. On a alors les comparaisons

$$\begin{aligned}
|[\varphi(x) - \varphi(y)](s)| &= |\varphi(x)(s) - \varphi(y)(s)| \\
&= \left| \left(e(s) + \int_a^b \Lambda(t,s)\, x(t)\, dt \right) - \left(e(s) + \int_a^b \Lambda(t,s)\, y(t)\, dt \right) \right| \\
&= \left| \int_a^b \Lambda(t,s) (x(t) - y(t))\, dt \right| \\
&\leq \int_a^b |\Lambda(t,s)| \, |x(t) - y(t)|\, dt \\
&\leq \int_{t \in S} \|\Lambda\| \, \|x - y\|\, dt \\
&= \ell(S) \|\Lambda\| \, \|x - y\|,
\end{aligned}$$

[5] Soit $f : S \times E \longrightarrow S$ continue. Soit $s_n \longrightarrow s$ une suite de $S^{\mathbf{N}}$ convergeant dans S. Montrons la tendance $\int_{t \in S} f(t, s_n)\, dt \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_{t \in S} f(t, s)\, dt$. Rappelons que la partie $\{s_0, s_1, s_2, ..., s\}$ est compacte. Soit $\varepsilon > 0$. Alors f est continue sur le compact $S \times \{s_0, s_1, s_2, ..., s\}$, donc (par Heine) y est uniformément continue. Soit $\delta > 0$ associé à f et à ε. Pour tout n naturel vérifiant $|s_n - s| < \delta$, on aura alors

$$\left| \int_S f(t, s_n)\, dt - \int_S f(t, s_n)\, dt \right| = \left| \int (f(t, s_n) - f(t, s))\, dt \right| \leq \int |f(t, s_n) - f(t, s)|\, dt \leq \int \varepsilon dt = \varepsilon \ell(S),$$

d'où la convergence (et la continuité) cherchée.

d'où (en prenant le *supremum* sur $s \in S$) la comparaison $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \gamma \|x - y\|$.

Remarque. Qu'advient-il sans l'hypothèse $\gamma < 1$? Imposons par exemple $\ell(S) = 1 = \|\Lambda\|$ en prenant $S = [0,1]$ et $\Lambda = 1$. On cherche alors à résoudre $x = e + \int_0^1 x$. S'il y a une solution, intégrer cette égalité sur $[0,1]$ montre alors que e est d'intégrale nulle ; réciproquement, si $\int_0^1 e = 0$, alors seront solutions toutes les translatées de e par une constante. Par conséquent, lorsque $\gamma \geq 1$, nous perdons en général l'existence et l'unicité d'une solution.

2. Posons $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & s \mapsto e(s) + \int_a^s \Lambda(t,s)\, x(t)\, dt \end{array} \right.$, de sorte que le problème revient à l'existence d'un point fixe par ψ.

Montrons que ψ est bien définie. À l'aide d'un reparamétrage affine, on fait disparaître la dépendance en s dans les bornes en l'envoyant dans l'intégrande : les théorèmes usuels de continuité sous le signe $\int$ s'appliquent alors.

Montrons que l'itérée $\psi^{\circ p}$ est contractante pour p assez grand. À cette fin, montrons par récurrence

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \underbrace{\forall x, y \in E,\ \forall s \in S,\ |\psi^p(x) - \psi^p(y)|(s) \leq \frac{((s-a)\|\Lambda\|)^p}{p!} \|x - y\|}_{\text{énoncé noté } C_p \text{ (comme "}\mathbf{c}\text{omparaison")}}.$$

Une fois la récurrence prouvée, prendre le *supremum* sur $s \in S$ donnera la comparaison $\|\psi^p(x) - \psi^p(y)\|_\infty \leq \frac{\gamma^p}{p!} \|x - y\|$: le facteur $\frac{\gamma^p}{p!}$ tendant vers 0 lorsque $p \to 0$, la fonction ψ^p sera bien contractante pour p assez grand, ce qui conclura.

L'énoncé C_0 est trivial par définition de la norme choisie sur E.

Soit $p \in \mathbf{N}$ tel que C_p. Soient $X, Y \in E$ et $s \in S$. Reprenons les comparaisons du premier point

$$|\psi(x) - \psi(y)|(s) \leq \|\Lambda\| \int_a^s |x - y|(t)\, dt$$

et remplaçons-y les fonctions (x, y) par $(\psi^p(X), \psi^p(X))$. Il vient alors

$$\begin{array}{rcl} \left|\psi^{p+1}(X) - \psi^{p+1}(Y)\right|(s) & \leq & \|\Lambda\| \displaystyle\int_a^s |\psi^p(X) - \psi^p(Y)|(t)\, dt \\ & \overset{\text{d'après } C_p}{\leq} & \|\Lambda\| \displaystyle\int_a^s \frac{((t-a)\|\Lambda\|)^p}{p!} \|x - y\|\, dt \\ & = & \|\Lambda\|^{p+1} \displaystyle\int_a^s \frac{(t-a)^p}{p!} dt\ \|x - y\| \\ & = & \|\Lambda\|^{p+1} \dfrac{(s-a)^{p+1}}{(p+1)!} \|x - y\|, \text{ d'où } C_{p+1}. \end{array}$$